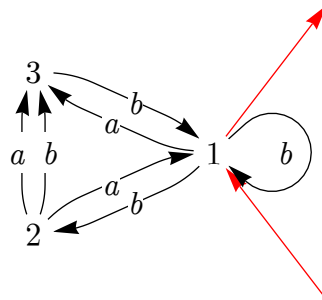


Repetition 2

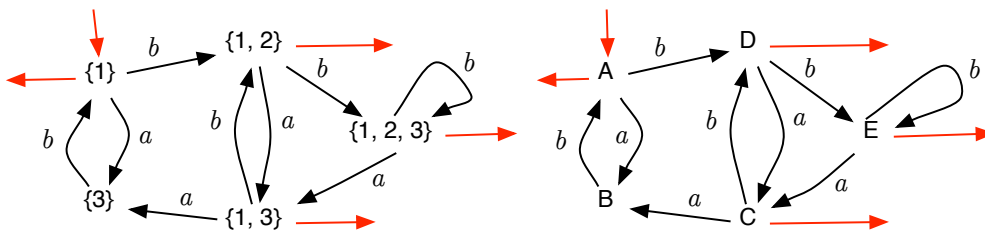
1. Betrakta vidstående NFA.



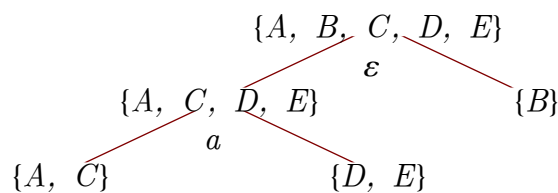
- Konstruera med hjälp av delmängdskonstruktionen en DFA ekvivalent med NFA:n.
- Är den resulterande DFA:n minimal? Om ej, minimera den!
- Konstruera ett reguljärt uttryck för automatens språk.

LÖSNING

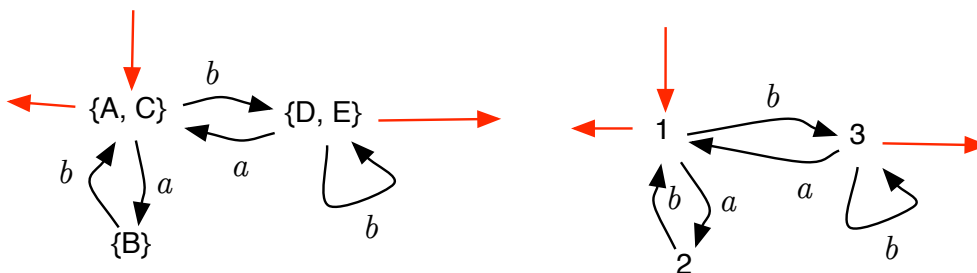
a) Delmängdskonstruktionen ger nedanstående DFA. Till höger med nya tillståndsnamn.



b) Den är inte minimal. A, C går nämligen inte att särskilja med a eller b . Detsamma gäller D, E .



Resultatet av ovanstående minimering blir



c) Med hjälp av tillståndselimination får man t.ex. $(ab \cup b^+a)^* b^*$.

2. Betrakta följande kategorier av språk

- reguljära, • inte reguljära, men sammanhangsfria, • inte sammanhangsfria.

Placera (med motiveringar) nedanstående språk över $\{a, b\}$ i rätt kategori.

- a) $L_1 = \{w \mid \text{Antal}(a, w) = 2 \cdot \text{Antal}(b, w)\},$
 b) $L_2 = \{w \mid \text{Antal}(a, w) = 2^{\text{Antal}(b, w)}\},$
 c) $L_3 = \{w \mid w = xy \text{ och } \text{Antal}(a, x) = \text{Antal}(a, y)\}.$

PS. $\text{Antal}(a, w)$ betecknar antalet a -förekomster i w .

- a) L_1 tillhör den andra kategorin.

Bristen på reguljäritet följer t.ex. av att $a^2 N b^N$ inte kan pumpas på något sätt inuti a -blocket utan att man faller ur språket. (En urpumpning av a :n leder ju till att det blir för få a :n.)

Men L_1 är sammanhangsfritt. Här är en CFG för språket: $S \rightarrow S S \mid a S b S a \mid a S a S b \mid b S a S a \mid \varepsilon$

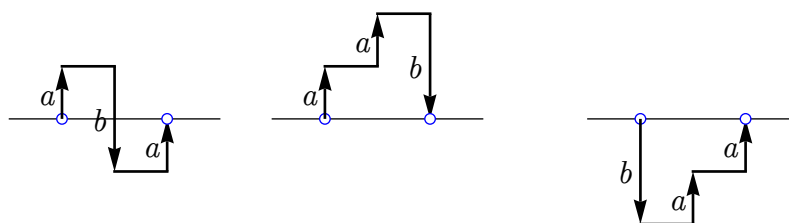
Motivering: Först kan man konstatera att varje regel ger dubbelt så många a som b . Därmed producerar reglerna enbart strängar ur L_1 . Men produceras *samtliga* $w \in L_1$?

Få se Betrakta en godtycklig sträng $w \in L_1$. Vi ska visa att w kan beskrivas med reglerna ovanför.

Tomt w beskrivs av basfallsregeln $S \rightarrow \varepsilon$.

Icketomma w då? De kortaste, vilka är $a b a$, $a a b$ och $b a a$, beskrivs onekligen av reglerna, eller hur!

De kan också beskrivas grafiskt som i figuren nedanför, där a representeras av en uppåtpil och b av en dubbelt så lång nedåtpil.

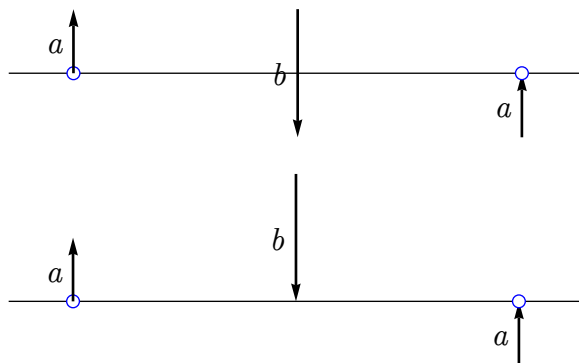


Betrakta nu ett godtyckligt icketomt w och dess grafiska representation.

Antag först att w börjar på a och slutar på a , dvs. att $w = a x a$ för något x . Med balansresonemang inses att man vid läsning av x :et förr eller senare måste passera balanslinjen uppifrån och nedåt.

Ty 1) vid läsning av det inledande a :et tvingas man upp ovanför balanslinjen, och 2) vid läsning av det avslutande a :et når man balanslinjen nedifrån.

Dessa två konstateranden sammantagna innebär att man någonstans på vägen mellan de två nämnda a :na måste passera balanslinjen uppifrån och nedåt. Passagen av balanslinjen på väg nedåt kan bara ske genom att endera *en* b -pil:s *mitt* möter linjen på väg nedåt, eller att en b -pils spets träffar linjen (och nämnda pil följs av ytterligare en b -pil).



Det betyder i sista fallet att vårt diskuterad w i själva verket är av typ SS där det första S :et representerar den del av w som läses fram till och med att man träffar balanslinjen inuti x , och det andra S :et är återstoden av w .

I första fallet, när en b -pils mitt träffar balanslinjen, kommer nämnda b -pil från den nivå ovanför linjen som det inledande a :et drev oss till, och den pekar på den nivå som det avslutande a :et kommer ifrån. Mellan inledande a och avslutande a finns därför en sträng av typ SbS . Alltså är w av typ $aSbSa$.

Detta avslutar diskussionen att w börjar på a och slutar på a . På motsvarande sätt går man igenom de övriga fallen.

b) L_2 tillhör den tredje kategorin.

Bristen på sammanhangsfrihet följer t.ex. av att $w = a^{2^K} b^K$ inte kan pumpas på något sätt i något enda block av längd K utan att man faller ur språket. Det senare förklaras av att *ingen* upp-pumpning kan bibehålla det givna förhållande mellan antalet a :n och antalet b :n, om pumpblocket *inte* är längre än K . Ty en upp-pumpning i ett K -block kan högst ge K nya tecken.

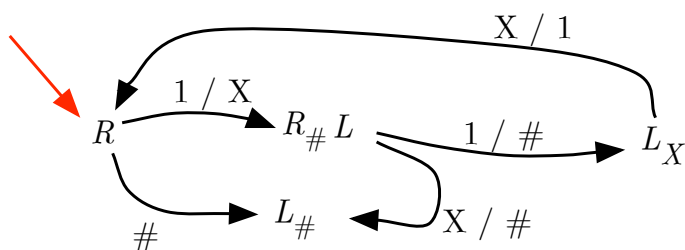
Och det räcker inte. Den närmast längre strängen i L_2 skall nämligen ha

$2^{K+1} = 2 \cdot 2^K = 2^K + 2^K$ stycken a :n och $K + 1$ stycken b :n. (Det behövs således minst $2^K + 1$ nya tecken.)

c) L_3 är reguljärt.

Det givna villkoret uttrycker nämligen bara att antalet a :n i w skall vara jämnt. Här är ett reguljärt uttryck för sådana w : $b^* \cup (b^* a b^* a)^* b^*$.

3. Turingmaskinen



är en funktionsberäknande typ med inputalfabet $\{1\}$. Vilken funktion beräknar den?

LÖSNING

Maskinen beräknar funktionen $Kvot(x, 2)$, för godtyckliga naturliga tal x , där input och output representeras unärt.

MOTIVERING: Varje komplett varv i slingan från R och tillbaka till R driver maskinen att (i höger ände) suddas bort en 1:a samt (i vänster ände) förflytta läshuvudet ett steg till höger:

$$\begin{array}{ccccccc} \# 1^n \# & \Rightarrow & \# 1 1^{n-2} \# & \Rightarrow & \# 1 1 1^{n-4} \# & \Rightarrow & \# 1 1 1 1^{n-6} \# \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Efter m varv ser tapekonfigurationen ut så här:

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^m 1^{n-2m} \# \quad (1)$$

(i) Om n är **jämn**, säg att $n = 2k$, så ser (1) ut så här $\# \overbrace{1 \dots 1}^m 1^{2k-2m} \#$.

Om antalet varv m sammanfaller med k , så får vi $\# \overbrace{1 \dots 1}^k \#$.

Därefter drivs maskinen att efter R gå den nedre vänstra övergången till $L_{\#}$. Resultatet blir

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^k \#$$

(ii) Om n är **udda**, säg att $n = 2k + 1$, så ser tapekonfigurationen istället ut på följande sätt efter m varv:

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^m 1^{2k+1-2m} \#$$

Om antalet varv m åter sammanfaller med k , så får vi

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^k 1 \#$$

I detta läge drivs maskinen att gå *halvvägs* in i slingan (fram till $R_{\#} L$). Därefter är tapekonfigurationen lika med

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^k X \#$$

Sedan drivs maskinen att gå den nedre högra övergången till $L_{\#}$ (samtidigt suddas X). Resultatet blir

$$\# \overbrace{1 \dots 1}^k \#$$

Sammantaget har vi sett att vare sig maskinen körs på $n = 2k$ ettor eller $n = 2k + 1$ ettor, stannar den med k ettor kvar på tapen. Det innebär att $Kvot(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ beräknas.

4. Konstruera en alternativ men enklare grammatik än nedanstående dito.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A B \\ A &\rightarrow A C \mid a C \\ B &\rightarrow C B \mid C a \\ C &\rightarrow \varepsilon \mid a C a \mid a C b \mid b C a \mid b C b \\ b C b &\rightarrow C \end{aligned}$$

ANM. Inom hierarkin reguljär < sammanhangsfri < restriktionsfri finns de enklaste grammatikerna till vänster. Din grammatik skall beskriva samma språk som den givna grammatiken. Full poäng erhålls enbart om en enklaste grammatik presenteras.

LÖSNING

Med A -reglerna produceras a följt av ett eller flera C :n, och B -reglerna ger på motsvarande sätt ett eller flera C :n följt av ett a .

Så S -regeln tillsammans med ovanstående regler säger att S är av typ $a C^n a$, där n är 2 eller större.

Med C -reglerna kan man producera *alla* strängar (över $\{a, b\}$) av *jämn* längd, även tom sträng. Den sista radens regel ($b C b \rightarrow C$) är värdelös. Ty med dess hjälp kan man inte åstadkomma något som man inte klarar utan densamma. Varför? Jo när nämnda regel "suddar" bort två b :n, får man en kortare sträng av jämn längd med a :n i kanterna och *varje* sträng av jämn längd med a :n i kantern kan redan tillverkas utan nämnda regel.

Sammantaget beskriver den givna grammatiken således språket (över $\{a, b\}$) av strängar som har jämn längd och som börjar och slutar på a - ett reguljärt språk.

Här är en reguljär grammatik för språket: $S \rightarrow a A, \quad A \rightarrow a \mid a a A \mid a b A \mid b a A \mid b b A$.

5. Diskutera avgörbarheten för problemet "Innehåller $L(M)$ enbart strängar av jämn längd?"
- då M är en godtycklig finit automat?
 - då M är en godtycklig Turingmaskin?

LÖSNING

a) Avgörbart. För given finit automat M med inputalfabet Σ behöver man bara konstruera en DFA för $L(M) \cap \Sigma(\Sigma^2)^*$ och undersöka ifall den saknar accepterandetillstånd på väg från start. (En sådan DFA *saknar* accepterandetillstånd omm svaret på det givna problemet är JA.)

b) Oavgörbart. Följer av RICES' sats. Ty det givna problemet handlar om en icke-trivial egenskap för Turingaccepterbara språk - nämligen egenskapen att innehålla enbart strängar av jämn längd. FORMELLT: Låt Ω vara mängden av Turingaccepterbara språk som innehåller enbart strängar av jämn längd. Det finns Turingaccepterbara språk inuti Ω (ex.vis $\{\varepsilon\}$) och det finns Turingaccepterbara språk utanför Ω (ex.vis $\{a\}$). Då följer enligt RICES' sats att ingen TM kan avgöra för godtycklig TM M ifall $L(M) \in \Omega$.